И.Ш. Коган

“Безразмерная физическая величина” – понятие условное

Аннотация. Анализ термина “безразмерная величина” приводит к выводу, что такое словосочетание не адекватно тому содержанию, которое в него вкладывается. Рассмотрение стандартного определяющего уравнения для физической величины показывает, что под “безразмерной величиной” фактически понимается числовое значение величины, которое не может существовать без базиса величины, имеющего размерность. Этот базис в каждом отдельном случае может условно рассматриваться как внесистемная единица. Приводятся конкретные примеры.

Рассматривается существующая классификация “безразмерных величин”, делящая их на 4 группы величин, и анализируются варианты решений по каждой из этих групп.

Под понятием “размерная величина” в метрологии понимается величина, имеющая размерность, отличную от 1, а под понятием “безразмерная величина” понимается величина, имеющая размерность, равную 1. На самом деле имеется более важное различие, и это различие ставит под сомнение адекватность и правомерность применения словосочетания “безразмерная физическая величина”.

1. Словосочетание “безразмерная физическая величина” не адекватно

Проанализируем взятое из метрологического справочника [1] определение: **“Безразмерная физическая величина** – физическая величина, в размерность которой основные физические величины входят в степени, равной нулю”. Из этого определения следует, что “безразмерная величина“ представляет собой отношение физических величин с одинаковыми размерностями.

Однако наличие нулевых показателей степеней размерностей в формуле размерности “безразмерной величины” не означает отсутствие у этой величины размерности вообще. Размерность имеется, только она равна 1.

Имеется у “безразмерной величины” и размер, который согласно [1] является “количественной определенностью физической величины“. Поскольку все “безразмерные величины“ количественно определяются, значит, все они имеют размер. К слову, в английской терминологии нет термина “sizeless quantity”, соответствующего русскому словосочетанию “безразмерная величина”, но имеется термин “dimensionless quantity”, который буквально переводится как “безразмерностная величина”.

Таким образом, название термина “безразмерная величина” <u>не соответствует его содержанию</u>. Замена этого термина более адекватным позволила бы ликвидировать терминологическую путаницу в этом вопросе. Можно предложить, например, заменить термин “безразмерная физическая величина” термином “**относительная физическая величина**” с таким определением: “Относительная физическая величина – это такая физическая величина, которая, будучи сомножителем любого определяющего уравнения, не влияет на формулу размерности той величины, которая определяется этим уравнением“.

В статье [2] была высказана мысль, что “безразмерные величины“ следовало бы называть скорее “безъединичными“. Но далее будет показано, что любая “безразмерная величина“ имеет свою внесистемную единицу, а у некоторых “безразмерных величин“ имеются и системные единицы, например, принятая в СИ единица радиан для угла.

И всё же термин “безразмерная величина” применяется очень часто и всеми сейчас одинаково понимается. Поэтому этот термин будет применяться и в данной статье, но будет браться в кавычки.

2. Любая физическая величина может считаться “безразмерной“

При анализе определения процесса измерений выясняется такое обстоятельство. Согласно определению, взятому из БСЭ и повторенному в интернет-энциклопедии ВИКИПЕДИЯ, “**измерение** – совокупность операций для определения отношения одной (измеряемой) величины к другой однородной величине, принятой за единицу, хранящуюся в техническом средстве (средстве измерений)“. Это определение вполне соответствует словам Л. Эйлера, сказанным еще более 200 лет тому назад: “Невозможно определить или измерить одну величину иначе, как приняв в качестве известной другую величину этого же рода и указав соотношение, в котором она находится к ней“.

Если теперь учесть, что, согласно [1], “размерность величины одновременно является размерностью ее единицы“, то можно придти к парадоксальному выводу: ***любая физическая величина “безразмерна“.*** Размерность у физической величины появляется лишь после того, как рядом с ней записывается системная или внесистемная единица со своей размерностью. И тогда различие между “размерной“ и “безразмерной“ величинами оказывается простым. Рядом с “размерной величиной“ стоит единица, а рядом с “безразмерной величиной“ единица не стоит.

Некоторые метрологи, чтобы “не оперировать размерностью, равной 1, ставят в соответствующих графах прочерк“ [3]. Ясно, что это не решение проблемы. В той же статье [3] сказано, что имеются “примеры, в которых безразмерные величины в одной системе единиц оказываются размерными в другой системе”. Ответом на эту цитату служит цитата из статьи [4]: “Имеющийся «размерно-безразмерный» дуализм, несомненно, противоречит основным законам логики, так как понятия взаимно исключают друг друга, физическая величина не может быть одновременно размерной и «безразмерной»”.

Кроме того, как указывается в [4], при делении друг на друга двух однородных величин “необходимо осуществлять два параллельных математических действия — деление чисел и деление (взаимодействие) размерностей”, так что сокращение размерностей или единиц при делении осуществляется лишь формально. “Частное от деления несет, кроме количественной оценки, и качественное содержание, ассоциируемое у прикладников с безразмерной величиной”.

3.Что объединяет “размерные” и “безразмерные” физические величины

На рис. 1а схематически представлено приведенное в справочнике [1] уравнение, определяющее значение физической величины Q:

$$Q = n[Q] \qquad (1)$$

где n – числовое значение физической величины Q, а $[Q]$ – единица величины Q (обозначение единицы в виде символа величины, заключенного в квадратные скобки, установлено международным стандартом ИСО 31/1).

Рис. 1. Схематичное изображение определяющего уравнения величины

Уравнение (1) в точности соответствует понятию “измерение“, приведенному выше. Для “размерных” физических величин единица $[Q]$ из уравнения (1) является **системной единицей**, то есть “размерная величина” привязана к конкретной системе единиц.

На рис. 1б то же самое уравнение (1) представлено в иной терминологии. Физическая величина Q названа размерной величиной, ее числовое значение n – безразмерной величиной, а единица $[Q]$ является тем базисом, размерность которого придает размерность физической величине.

Если перейти к системе единиц, в которой базис величины не является системной единицей, то физическая величина, лишившись размерности базиса, становится как бы “безразмерной” физической величиной. В этом и заключается тот самый противоречащий основным законам логики “«размерно-безразмерный» дуализм“, о котором говорится в статье [4]. При этом “физическая величина не может быть одновременно размерной и «безразмерной»”, как сказано в [4].

Именно по этой причине числовое значение n из равенства (1) в том случае, когда единица величины не является системной единицей, называют в литературе то “безразмерной величиной“, то критерием подобия, то масштабом. Действительно, если записать определяющее уравнение для числового значения n следующим образом:

$$n = Q / [Q] \,, \quad (2)$$

то становится ясно, что числовое значение n в любом случае является безразмерной величиной, так как величина Q и ее базис $[Q]$ имеют одинаковые размерности. И если базис $[Q]$ оказывается не системной единицей, то это не означает, что он не имеет размерности. Базис может быть **внесистемной единицей** или просто физической величиной, в любом случае он имеет свою размерность.

Нельзя представить себе отсутствие базиса величины $[Q]$ вообще, ибо в таком случае, согласно (2), будет отсутствовать само числовое значение n, то есть будет отсутствовать сама “безразмерная величина“.

Приведем примеры из практики.

4. Чем различаются “размерные” и “безразмерные” физические величины

Сравним равенство (1) с другим равенством, произвольно взятым из всем знакомой области техники, например, с формулой для вычисления объема пространства V над поршнем двигателя внутреннего сгорания:

$$V = \varepsilon\, V_k \,, \quad (3)$$

где V_k – объем камеры сгорания при положении поршня в верхней мертвой точке; ε – степень сжатия. Последняя также является физической величиной, поскольку характеризует важное свойство каждого типа двигателя внутреннего сгорания.

Если условиться о том, что V_k будет внесистемной единицей объема надпоршневого пространства, то равенства (1) и (3) становятся идентичными по содержанию. Множитель ε по содержанию становится не отличимым от множителя n в равенстве (1), поскольку ε также является числовым значением объёма камеры сгорания V_k , если этот объём принять за внесистемную единицу в данной области техники. И тогда внесистемная единица V_k имеет размерность объёма.

Можно привести еще один не менее наглядный пример. Пусть скорость летательного аппарата v, движущегося в воздухе при 0ºС и давлении 1 ат, равна 662 м/с. Эту скорость можно записать так:

$$v = M\, v_s \,, \quad (4)$$

где v_s – скорость звука в воздухе; M – число Маха (критерий подобия), равное в данном примере числу 2. Скорость звука v_s можно тоже принять условно за внесистемную единицу в данной области техники. Эта внесистемная единица имеет размерность скорости. Не зря ведь в авиации, говоря о сверхзвуковых скоростях, часто говорят, что скорость летательного аппарата соответствует, например, двум числам Маха, хотя точнее было бы сказать: числу Маха, равному 2.

В молекулярной физике в уравнении для определения числа элементов N однородной системы применяют уравнение:

$$N = n\, N_A\,, \quad (5)$$

где N_A – число Авогадро. Величину n из уравнения (5) называют в СИ количеством вещества, этой величине присвоена размерность N и единица моль. Однако число Авогадро само является числом структурных элементов однородной системы. И размерность N должна относиться не к количеству вещества n, а к числу элементов N и к числу Авогадро N_A . Именно число Авогадро является внесистемной единицей для числа структурных элементов в молекулярной физике и должно иметь размерность N. А количество вещества n является “безразмерной величиной” или числовым значением числа элементов N. Хотя именно для количества вещества n в СИ имеются и размерность, и единица. На эту нелогичность в СИ указывается в статьях [5,6].

То, что количество вещества n из уравнения (5) оказалось в СИ основной физической величиной, стало возможным только потому, что стандарт позволяет вводить основные величины в системы единиц <u>условно</u>.

В атомной физике большое распространение имеет собственный момент импульса (спин) частицы L, определяемый по уравнению

$$L = J\,\hbar\,, \quad (6)$$

где J – спиновое число, $\hbar$ – редуцированная постоянная Планка ($\hbar = h/2\pi$, где h – постоянная Планка). Спиновое число J является “безразмерной величиной” (критерием подобия), и его физики часто называют просто спином. Но это неправильно, нельзя называть одновременно одним и тем же термином и размерную величину L (собственный момент импульса частицы), и “безразмерную величину” J.

В приведенных выше четырех примерах (см. рис. 2) степень сжатия ε из уравнения (3) становится количеством объемов V_k , число Маха M из уравнения (4) – количеством скоростей звука v_s , количество вещества n из уравнения (5) – количеством чисел Авогадро N_A и спиновое число J из уравнения (6) – количеством постоянных Планка $\hbar$.

Все эти “безразмерные величины“ имеют размерность, равную 1. Каждое из указанных количеств имеет свою, применяемую в конкретной области физики и техники <u>внесистемную единицу</u> (объем камеры сгорания V_k , скорость звука v_s , число Авогадро N_A и постоянная Планка $\hbar$). И каждая из этих внесистемных единиц имеет конкретную размерность, не равную 1.

Интересно, что слово “число“ на рис.2б,г применяется к “безразмерным величинам“, а на рис. 2в – к внесистемной единице, имеющей размерность. Это лишний раз подчеркивает, что при анализе физического содержания величин не следует опираться на их принятое когда-то и кем-то название.

Конечно, если учесть огромное количество всевозможных критериев подобия, каждый из которых может иметь свою внесистемную единицу, то можно представить себе возбуждение метрологов, связанное с появлением огромного количества внесистемных единиц. Но внесистемные единицы типа тех, о которых сказано выше, существуют на практике, только их не называют внесистемными единицами.

а) Надпоршневой объём V = Степень сжатия ε X Объём камеры сгорания $[V_k]$

б) Скорость полета v = Число Маха M X Скорость звука v_s

в) Число структурных элементов N = Количество вещества n X Число Авогадро N_A

г) Спин L = Спиновое число J X Постоянная Планка $\hbar$

Рис. 2. Схематичное изображение определяющих уравнений в приведенных примерах: **а**) – (3), **б**) – (4), **в**) – (5), **г**) – (6).

Добавим также, что внесистемные единицы могут быть модулями векторных величин, как например, скорость звука v_s в уравнении (4).

5. В чем особенности внесистемных единиц

В уравнении (4) внесистемная единица $[v_s]$ равна 331 м/с, тогда как системная единица равна 1 м/с.

В уравнении (5) внесистемная единица $[N_A]$ совершенно не соответствует системной единице моль$^{-1}$. Так что вполне справедливо недоумение авторов работы [7] по поводу того, что ”постоянная Авогадро имеет абсурдную единицу измерений моль$^{-1}$ (чего «на моль»?)”. Оба числа структурных элементов N и N_A в уравнении (5) должны иметь одни и те же размерность N и единицу шт (штука). То есть в уравнении (5) внесистемная единица $[N_A]$ равна $6{,}022 \cdot 10^{23}$ шт, а не $6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Редуцированная постоянная Планка $\hbar$ из уравнения (6) имеет в СИ единицу Дж·с. Правда, как показано в статье [8], $\hbar$ должна иметь единицу Дж·с/об, в которой единица об (оборот) принадлежит полному углу поворота радиус-вектора на векторной диаграмме. В той же статье [8] указано на то, что физическое содержание имеет не редуцированная постоянная Планка $\hbar$, а постоянная Планка h с единицей Дж·с/квант.

Внесистемные единицы могут делиться на части, то есть могут быть нецелыми, в том числе, дробными числами. Например, вполне допустимо говорить: полтора объёма камеры сгорания $[V_k]$ или три четверти скорости звука $[v_s]$. Внесистемные единицы могут иметь как фиксированные, так и переменные значения. Например, такие внесистемные единицы, как число Авогадро N_A из уравнения (5) и постоянная Планка h из уравнения (6), являются фундаментальными физическими константами.

Согласно терминологии, предложенной известным термодинамиком А.Гухманом [9], “безразмерные величины“ (критерии подобия) с базисом величины, являющимся физической константой, следует называть **константами подобия**.

В отличие от них объем камеры сгорания V_k в уравнении (3) имеет фиксированное значение только в пределах конкретного типа двигателей внутреннего сгорания, а значение скорости звука v_s в уравнении (4) зависит от физических характеристик атмосферы в том месте, в котором находится летательный аппарат. Подобные “безразмерные величины“ рекомендовано в [9] называть **параметрическими критериями подобия**.

Все остальные “безразмерные величины“, которые и являются обычными критериями подобия, имеют в качестве базиса переменные физические величины. Например, у числа Рейнольдса базисом является сила трения жидкости о стенку, которая зависит от многих факторов.

6. Классификация “безразмерных физических величин“

Как указывается в статье [10], СИ идентифицирует четыре разные группы “безразмерных величин“, то есть величин с размерностью 1.

1. Критерии подобия;

2. Угловые величины (углы поворота и угловые перемещения);

3. Числа структурных элементов (количества однородных элементов системы);

4. Логарифмические отношения.

Каждая из этих групп должна иметь свое собственное <u>решение в отношении применяемых размерностей и единиц</u>.

О физическом содержании “размерных величин“ можно составить пусть и неполное представление по их размерности. О физическом содержании “безразмерных величин“ можно судить лишь по их определяющему уравнению (если оно приводится) и косвенно по названию критерия. Но название – это всего лишь слово, в лучшем случае, словесная формулировка. Она тоже в определенной мере условна.

1. “Безразмерные величины“ первой группы (критерии подобия) чрезвычайно различны по своей природе и по области применения. Они являются отношениями разных физических величин (отношениями сил, мощностей, интенсивностей, скоростей, напоров, площадей, температур и т.д.). И желательно, чтобы это различие было как-то отражено с помощью формулы размерности их базиса. Варианты решения проблемы для этой группы “безразмерных величин“ предлагаются в статьях [11,12] и ниже в данной статье.

2. Решение для второй группы “безразмерных величин“ (угловых величин) предложено давно, только оно до сих пор является лишь предметом дискуссии. Это решение заключается в том, чтобы сделать угол поворота <u>основной физической величиной</u> и присвоить ему свою размерность. Единица для этой величины уже давно имеется (радиан или оборот), надо только использовать ее для всех величин вращательной формы движения, а не только для угловой скорости и углового ускорения. Это решение рассмотрено в статьях [13,14,15]. Оно поддерживается также автором обзорной статьи [10], но при этом в ней указывается, что подобное решение “потребовало бы пересмотра определяющих уравнений для когерентных производных единиц других угловых величин“. Дискуссия по этому поводу пока не привела к международному соглашению.

3. Для третьей группы “безразмерных величин“ (чисел структурных элементов) предлагается несколько решений. Одно из них [8,16] предлагает сделать число структурных элементов <u>основной физической величиной</u>. Дискуссия в данном варианте относится, скорее, к тому, как назвать единицу такой величины [16,18,4,8].

4. Для “безразмерных величин“ четвертой группы (логарифмических отношений) рациональное решение пока не предложено [10].

Когда, наконец, предложенные решения по отношению к угловым величинам и числам структурных элементов будут приняты, то нельзя будет говорить о них, как о “безразмерных величинах“.

7. Вариант записи размерности для “безразмерных физических величин“

“Безразмерные величины“ имеют ту же физическую природу, что и физические величины, от которых они образованы. Их “безразмерность“ проявляется лишь в том, что при анализе размерностей определяющих уравнений других физических величин наличие в этих уравнениях “безразмерных величин“ не влияет на результат анализа размерностей. По этому поводу в статье [4] приводится такое мнение: “Согласно существующим математическим правилам при делении однородных величин остается “безразмерное” число, однако… у прикладников абсолютной идентификации с числом не происходит, напротив, продолжает сохраняться скрытый физический смысл, связанный с исходными величинами“.

Автор статьи [11] попробовал следовать буквально следующей рекомендации, взятой из метрологического справочника [1]: “Чтобы найти размерность производной физической величины в некоторой системе величин, надо в правую часть определяющего уравнения этой величины вместо обозначений величин подставить их размерности“. В результате размерность каждой “безразмерной величины“ стала записываться, как размерность ее базиса в нулевой степени. Например, размерность относительной линейной деформации стала равной L^0, а ее единица – равной $м^0$, размерность числа Маха стала равной $(LT^{-1})^0$, а его единица – равной $(м/с)^0$. Ведь нуль разрешен стандартом для применения в качестве показателя степени размерности. При этом различие между физическим содержанием “безразмерных величин“ сразу стало заметным.

Единственное примечание к такому варианту: нужно учитывать ту форму записи “безразмерной величины“, которая является исходной с точки зрения физического содержания, а не ту форму записи, которая получается после сокращений некоторых физических величин в числителе и знаменателе отношения. Например, при записи размерности критерия Рейнольдса следует указывать не размерность динамической вязкости η (исходя из популярной формулы $Re = ud\rho/\eta$), а размерность силы, так как критерий Рейнольдса является отношением сил инерции к силам вязкого трения. Значит, размерность критерия Рейнольдса в СИ можно записать, как $(LMT^{-2})^0$, а единицу как $Н^0$ (Ньютон)^0.

В принципе, ничто не запрещает применять рассмотренное предложение на практике. Применение этого предложения может оказаться особенно эффективным при преподавании гидравлики и теплотехники, в которых применяется множество различных критериев подобия.

8. Как назвать единицу “безразмерной величины“?

Автор статьи [16] считает, что число 1 (единица) для “количеств однородных элементов“ должно рассматриваться как единица СИ, отдавая себе отчет в том, что это приведет к ревизии СИ. Сложность ситуации заключается в том, что единица измерений под названием “единица“ звучит, как тавтология. На английском языке ситуация несколько упрощается по сравнению с русским языком, там единица измерений − это unit, а числовая единица − это one.

В статье [16] указывается также, что “единица“ для “количеств однородных элементов“ в квантовой механике является <u>целым числом</u>, а в других разделах физики – <u>нецелым числом</u>. В последнем случае им рассматривается возможность использования для числовой единицы приставок мега-, кило-, санти-, милли-, микро-, пико- и т.п. Это не совсем точно, так как приставки мега- и кило- могут применяться и к целым числам.

Аналогичный взгляд изложен и в статье [17], в которой периодические процессы делятся на квантуемые и непрерывные. В <u>квантуемых периодических процессах</u> применяется “единица“ в виде целого числа, а в <u>непрерывных периодических процессах</u> – в виде нецелого числа. В качестве примера такой неоднозначности в [17] приведен волновой процесс. В абсолютно черном теле процесс квантован, и число стоячих волн внутри абсолютно черного тела является только целым числом, а в свободном пространстве число волн может отображаться и нецелым числом, если учитывать части полной волны.

Единица в квантуемых периодических процессах при анализе различных физических явлений называется авторами этих анализов по-разному. Применяются, например, такие названия: кв (квант), пер (период), волна. Для процесса колебаний предлагается [17] называть периодом один структурный элемент колебательного процесса, то есть буквально один полный период колебаний, а вовсе не длительность этого периода. И тогда частота колебаний будет измеряться естественной единицей пер/с, а не непонятной единицей $с^{-1}$, а длительность периода – единицей с/пер, а не просто секундой. В атомной физике и сейчас для частоты обращения электрона вокруг ядра применяют единицу об/с, а в технике – единицу об/мин для угловой частоты. А ведь один период колебаний эквивалентен одному обороту радиус-вектора на векторной диаграмме.

Применение числовой единицы приводит к качественно новым результатам и в физике. В статье [17] приведены примеры уточнения с помощью числовой единицы записей уравнений закона фотоэффекта Эйнштейна и закона излучения Планка.

Для единицы под названием “единица“ в статье [16] был предложен символ I и название на английском языке – heis. На классическом греческом языке εισ означает единицу. Несколько позже в статье [18] было предложено дать такой единице другое название на английском языке − uno и символ U и использовать такую единицу с приставками для замены десятичной доли, процента и промилле.

Автор статьи [4] придерживается того мнения, что единица числа однородных элементов должна быть названа **штукой**. Он утверждает, что ”хотя единица «штука» не узаконена в СИ и, соответственно, в отечественных метрологических стандартах, то есть де-юре такой единицы измерения не существует, однако де-факто, то есть в реальной жизни, она узаконена в русском языке очень давно”.

Слово ”штука”, вообще-то, происходит из немецкого языка. В русском языке оно имеет значение ”отдельного предмета из числа однородных, считаемых предметов” (Словарь Грамота-ру). Примерно такое же лексическое значение оно имеет в основных европейских языках. Так что лексическое значение этого слова полностью адекватно его физическому содержанию.

Правда, единица **штука** может применяться к физической величине, являющейся только целым числом (числом молекул, атомов, электронов, фотонов и пр.). Штука не может делиться на части, так как при этом она перестает существовать. Молекула, разделенная на части, становится системой, состоящей из атомов, то есть качественно других структурных элементов.

Широкое применение единица штука имеет в экономике, где ею измеряют количество штучных товаров. В экономике штука является целым числом, так как штучный товар на части не делится.

Что касается углов поворота, которые в СИ имеют единицу **радиан**, но считаются при этом “безразмерными величинами“, поскольку их размерность в СИ равна 1, то здесь вопрос должен быть решен иначе. Называть радиан единицей угла поворота с точки зрения метрологии нельзя, ибо измерительный эталон существует не для радиана, а для углового градуса (для доли полного угла поворота, то есть для доли одного оборота). В статье [13] доказано, что именно **оборот** является единицей для угла поворота.

Впрочем, группа угловых величин со временем будет изъята из категории “безразмерных величин“.

Выводы

1. “Безразмерных величин” фактически не существует, не говоря уже о том, что само это словосочетание не адекватно.

2. Под “безразмерной физической величиной” понимается числовое значение размерной величины, которое не может существовать без базиса этой величины, определяющего ее размерность.

3. Базисом физической величины служат системные и внесистемные единицы, как прописанные в принятой системе единиц, так и не прописанные в ней.

4. Базисом физической величины могут быть как фундаментальные физические константы, так и характерные параметры того или иного явления, того или иного типа

технических устройств, а также физические величины, характеризующие определенное явление.

Литература

1. Чертов А.Г., Физические величины. – М.: Высшая школа. – 1990. – 336 с.
2. Johansson I.,, Metrological thinking needs the notions of parametric quantities, units, and dimensions. – Metrologia. – 2010. – **47** – p.p. 219-230.
3. Брянский Л.Н., Дойников А.С., Крупин Б.Н., О "размерностях" безразмерных единиц. – Законодательная и прикладная метрология. – 1999. – **4** . – с.с. 48-50.
4. Митрохин А.Н., Качественная единица как элемент размерностного анализа или к вопросу о размерности "безразмерных" величин. – Законодательная и прикладная метрология. – 2010. – № 3.
5. Gornshtein B., The mole – a unit for the quantity of matter. – Meas. Tech. – 1972. – **15**. – p.p. 711–716
6. Price G., Failures of the global measurement system: I. The case of chemistry. – Accreditation Qual. Assur., – 2010. – **15**. – p.p. 421–427
7. Дайнеко В.И. и др., Памятка для решения расчетных задач по химии. – М.: Интеллект. – 1997. – 49 с.
8. Коган И.Ш., Число структурных элементов как основная физическая величина. – Мир измерений. – 2011. – **10**. – с.с. 46-50, см. также http://physicalsystems.narod.ru/index08.04.html. – 2008.
9. Гухман А.А., Введение в теорию подобия. – М:, Высшая школа. – 1968. – 355 с.
10. Foster M.P., The next 50 years of the SI: a review of the opportunities for the e-Science age. Review article. – Metrologia. – 2010. – **47**. – p.p. R41-51.
11. Коган И.Ш., К вопросу о размерности и единицах измерений безразмерных физических величин. – Законодательная и прикладная метрология. – 1998. – **4**. с.с. 55-57.
12. Коган И.Ш., Анализ размерностей и единиц для "безразмерных величин". – 2006. – http://physicalsystems.narod.ru/index08.01.2.html.
13. Коган И.Ш., Угол поворота – основная физическая величина. – 2011. – Законодательная и прикладная метрология. – 2011. – **6**. – с.с. 55-65, см. также http://physicalsystems.narod.ru/index07.02.3.html. – 2008.
14. Yudin M.F., The problem of the choice of the basic SI units. – Meas. Tech. – 1998. – **4**. – p.p. 873–875
15. Dybkaer R., Units for quantities of dimension one. – Metrologia. – 2004. – **41** –p.p. 69-73.
16. Mills I.M., Unity as a Unit. – Metrologia. – 1995. – **31** – p. 537
17. Коган И.Ш., Метрологические и терминологические проблемы описания периодических процессов и выбора единиц измерений. – Мир измерений. – 2011. – **6**. – с.с. 12-18, см. также http://physicalsystems.narod.ru/index07.05.1.html. – 2008.
18. Quinn T.J., Mills I.M., The use and abuse of the terms percent, parts per million and parts in 10^n. – Metrologia. – 1998. – **35** – p.p. 807–810.